



# ANALISI DI ROBUSTEZZA

ITALIANO

Versione 1.2 - Settembre 2025

*SCA CONTROL - I sistemi di controllo per i tuoi processi*

## 1 Introduzione

In questo documento confrontiamo i controllori AC e PID in termini di robustezza all'instabilità e alle incertezze del modello di processo. Ci aspettiamo che il PID garantisca una migliore robustezza, poiché la progettazione di AC dipende strettamente dal modello di processo. Se ciò viene verificato, l'obiettivo è quantificare la mancanza di robustezza di AC rispetto al PID e stabilire se questa possa compromettere le prestazioni del sistema di controllo.

Per l'analisi della robustezza all'instabilità, consideriamo:

- Margine di fase ( $P_m$ ): per l'analisi della robustezza all'instabilità dovuta a variazioni di fase
- Margine di guadagno ( $G_m$ ): per l'analisi della robustezza all'instabilità dovuta a variazioni di guadagno
- Picco di sensibilità ( $M_S$ ): per l'analisi della robustezza rispetto alle incertezze del modello di processo

## 2 Fondamenti teorici

Per quanto riguarda l'analisi della robustezza all'instabilità, consideriamo la funzione di trasferimento in anello aperto  $L(z) = C(z)G(z)$ , dove  $C(z)$  è la funzione di trasferimento del controllore e  $G(z)$  la funzione di trasferimento del processo.

Il margine di fase  $P_m$  è definito come:

$$P_m = 180^\circ + \phi(\omega_{cp}) \quad (1)$$

dove  $\phi(\omega_{cp})$  è il ritardo di fase di  $L(z)$  alla pulsazione di attraversamento  $\omega_{cp}$ , in cui il guadagno è unitario (0 dB). Il margine di fase è una misura di stabilità nei sistemi di controllo, che rappresenta la quantità di sfasamento necessaria per raggiungere  $-180^\circ$  alla frequenza di attraversamento del guadagno. Un margine di fase più grande indica un sistema più stabile, mentre un margine di fase negativo suggerisce instabilità e possibili oscillazioni. Generalmente è richiesto che  $P_m$  sia compreso tra  $30^\circ$  e  $60^\circ$ , con  $45^\circ$  come valore tipico.

Il margine di guadagno  $G_m$  è definito come:

$$G_m[dB] = -M(\omega_{cg}) \quad (2)$$

dove  $M(\omega_{cg})$  è il guadagno di  $L(z)$  (in dB) alla pulsazione  $\omega_{cg}$  in cui lo sfasamento è pari a  $180^\circ$ . Il margine di guadagno è una misura di stabilità che rappresenta di quanto il guadagno del sistema può essere aumentato prima che diventi instabile. È essenzialmente un margine di sicurezza, che indica quanto margine c'è prima che il sistema inizi a oscillare o divergere. Un margine di guadagno più alto implica un sistema più stabile. Generalmente è richiesto che  $G_m$  sia compreso tra 6 e 12 dB, con 10 dB come valore tipico.

Per l'analisi delle incertezze del modello di processo, consideriamo la funzione di trasferimento in anello chiuso:

$$W(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} \quad (3)$$

Deriviamo  $W(z)$  rispetto a  $G(z)$ :

$$\frac{dW(z)}{dG(z)} = \frac{d}{dG(z)} \left( \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} \right) = \frac{C(z)}{(1 + C(z)G(z))^2} = S \frac{W(z)}{G(z)} \quad (4)$$

dove

$$S(z) = \frac{1}{1 + C(z)G(z)} \quad (5)$$

è la funzione di sensibilità. La funzione di sensibilità descrive anche la funzione di trasferimento dal disturbo esterno all'uscita del processo. Per quantificare la robustezza alle incertezze del modello di processo consideriamo il picco di sensibilità nominale  $M_S$ :

$$M_S = \max_{\omega} |S(j\omega)| = \max_{\omega} \left| \frac{1}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} \right| \quad (6)$$

Un valore più piccolo di  $M_S$  indica una migliore robustezza alle incertezze del modello di processo. Spesso si richiede che  $M_S$  sia inferiore a 6 dB.

### 3 Setup sperimentale

Data una particolare struttura di processo, entrambi i controllori AC e PID vengono progettati per una combinazione specifica di specifiche ( $\alpha$ ,  $\beta$ ...). Si veda il documento "preliminari" per la spiegazione di tali parametri. Per entrambi i controllori vengono calcolati e confrontati  $P_m$ ,  $G_m$  e  $M_S$ . Il test viene poi ripetuto per altri valori delle specifiche e tutti i risultati vengono riportati in grafici.

Inoltre, per ciascuna delle tre variabili, un valore di riferimento viene evidenziato nel grafico. Esso indica una soglia oltre la quale la robustezza del sistema di controllo è considerata scarsa e probabilmente inaccettabile. In questo documento consideriamo i seguenti valori:

- $P_{m,min} = 45^\circ$  (margine di fase minimo)
- $G_{m,min} = 10$  dB (margine di guadagno minimo)
- $M_{S,max} = 6$  dB (picco di sensibilità massimo)

#### 3.1 Processi 1p

Nelle Figure 1-2-3, riportiamo rispettivamente i valori di  $P_m$ ,  $G_m$  e  $M_S$  per il caso di processo 1p. Si può osservare che:

- Il  $P_m$  del PID è sempre maggiore, ma il  $P_m$  di AC rimane ben al di sopra della soglia.
- Con una specifica di overshoot del 10%, il  $G_m$  del PID e quello di AC hanno valori simili (a parità di  $\beta$ ). Con un overshoot del 5%, il  $G_m$  di AC è leggermente maggiore.
- I valori di  $M_S$  sono leggermente maggiori con AC, ma rimangono ben al di sotto della soglia.

### 3.2 Processi 1p1z

Nelle Figure 4-5-6, riportiamo i valori di  $P_m$ ,  $G_m$  e  $M_S$  per il caso di processo 1p1z. Si può osservare che:

- Il  $P_m$  del PID è sempre maggiore, ma il  $P_m$  di AC rimane ben al di sopra della soglia.
- Il  $G_m$  di AC è sempre maggiore di quello del PID.
- I valori di  $M_S$  sono leggermente maggiori con AC, ma rimangono nettamente al di sotto della soglia. Vale la pena sottolineare la scarsa robustezza del PID con  $\beta = 20$  (cioè con una frequenza di campionamento più bassa), in particolare con  $\alpha$  piccolo e  $\gamma$  grande.

### 3.3 Processi 2p

Nelle Figure 7-8-9, riportiamo i valori di  $P_m$ ,  $G_m$  e  $M_S$  per il caso di processo 2p. Si può osservare che:

- Il  $P_m$  del PID è sempre maggiore, ma il  $P_m$  di AC rimane ben al di sopra della soglia.
- Il  $G_m$  di AC e quello del PID hanno valori simili.
- I valori di  $M_S$  sono leggermente maggiori con AC, ma rimangono ben al di sotto della soglia.

### 3.4 Processi 2p1z

Nelle Figure 10-11-12, riportiamo i valori di  $P_m$ ,  $G_m$  e  $M_S$  per il caso di processo 2p1z. Si può osservare che:

- Il  $P_m$  del PID è sempre maggiore, ma il  $P_m$  di AC rimane ben al di sopra della soglia.
- Il  $G_m$  di AC è sempre maggiore di quello del PID.
- I valori di  $M_S$  sono leggermente maggiori con AC, ma rimangono ben al di sotto della soglia.

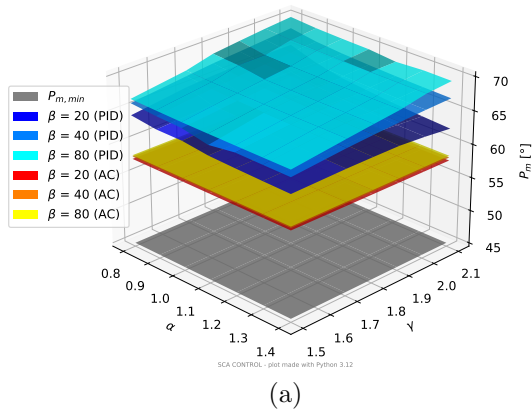
## 4 Conclusioni

Gli esperimenti mostrano che i controllori AC presentano una robustezza maggiore di quanto inizialmente previsto, in particolare in termini di margine di guadagno. Per quanto riguarda la robustezza all'instabilità, il  $P_m$  di AC è sempre inferiore rispetto al PID, ma mostra un  $G_m$  maggiore (soprattutto nei casi di processi con uno zero).

La principale preoccupazione riguardava la robustezza di AC rispetto alle incertezze del modello di processo. Infatti, l' $M_S$  di AC è sempre maggiore rispetto a quello del PID, ma sempre ben al di sotto della soglia. Inoltre, il rischio di degrado delle prestazioni di AC dovuto alle incertezze del modello può essere mitigato tramite un'accurata identificazione dei parametri di processo o implementando un controllo adattivo quando i parametri sono

soggetti a variazione.

Robustness analysis ( $P_m$ ): structure=1p, d=1, overshoot=0.1



Robustness analysis ( $P_m$ ): structure=1p, d=1, overshoot=0.05

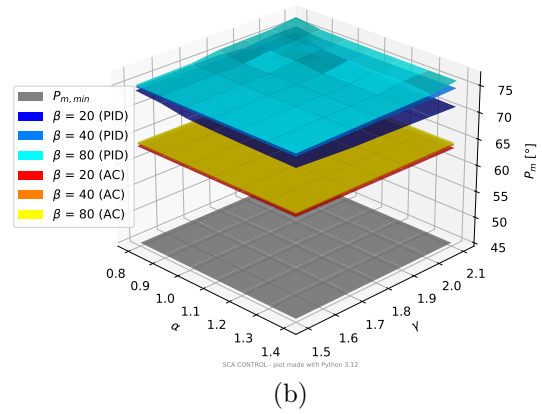
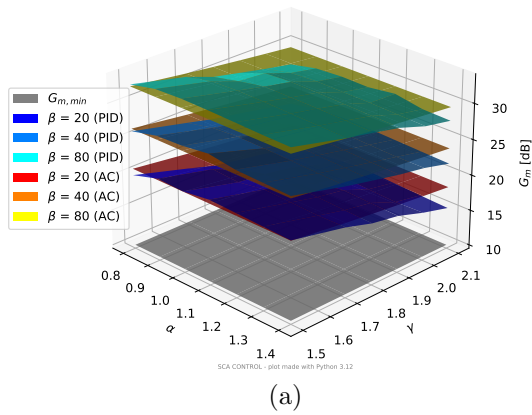


Figure 1: Test of phase margin for 1p-process with a) 10% overshoot, b) 5% overshoot.

Robustness analysis ( $G_m$ ): structure=1p, d=1, overshoot=0.1



Robustness analysis ( $G_m$ ): structure=1p, d=1, overshoot=0.05

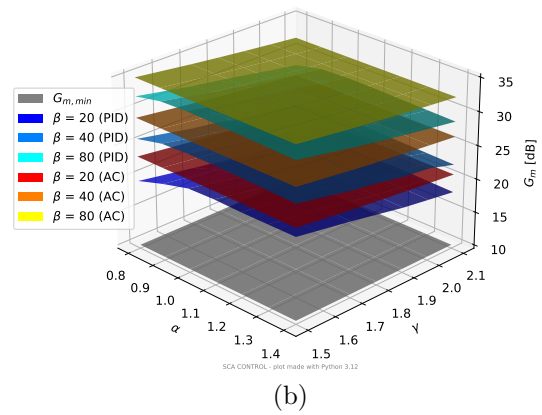


Figure 2: Test of gain margin for 1p-process with a) 10% overshoot, b) 5% overshoot.

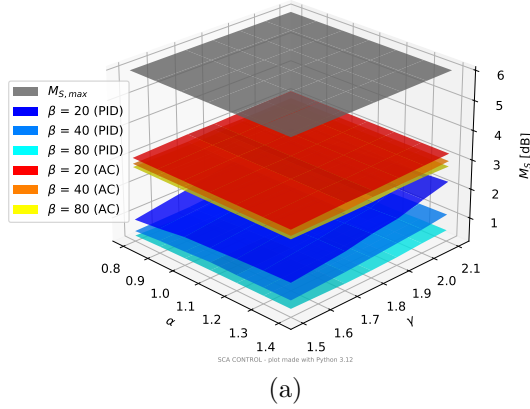
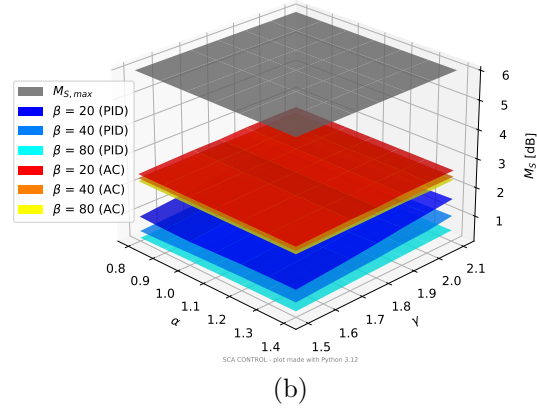
Robustness analysis ( $M_S$ ): structure=1p, d=1, overshoot=0.1Robustness analysis ( $M_S$ ): structure=1p, d=1, overshoot=0.05

Figure 3: Test of sensitivity peak for 1p-process with a) 10% overshoot, b) 5% overshoot.

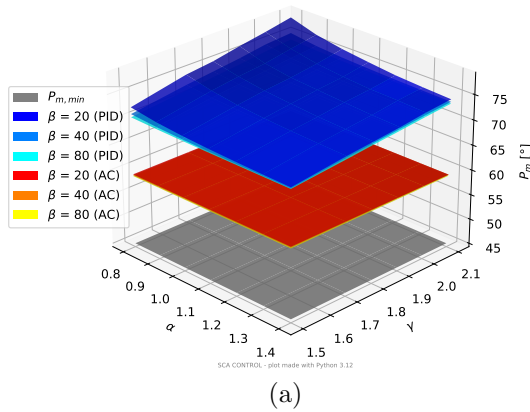
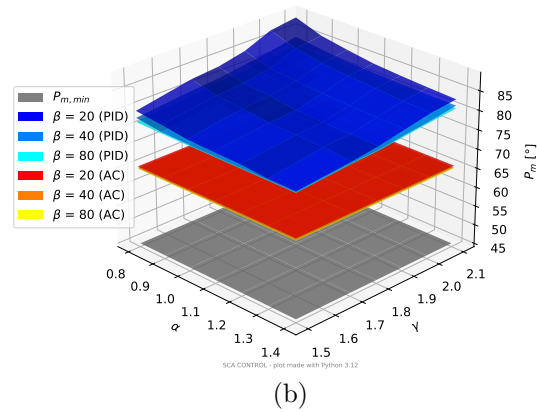
Robustness analysis ( $P_m$ ): structure=1p1z, d=1, overshoot=0.1Robustness analysis ( $P_m$ ): structure=1p1z, d=1, overshoot=0.05

Figure 4: Test of phase margin for 1p1z-process with a) 10% overshoot, b) 5% overshoot.

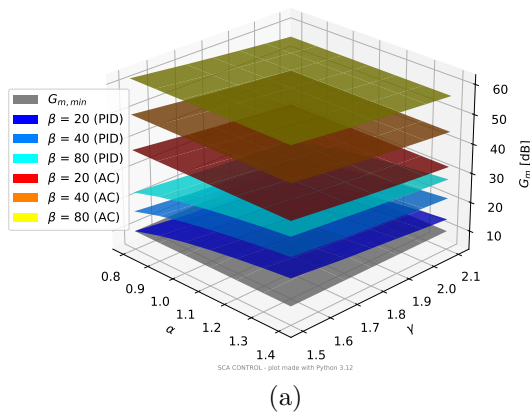
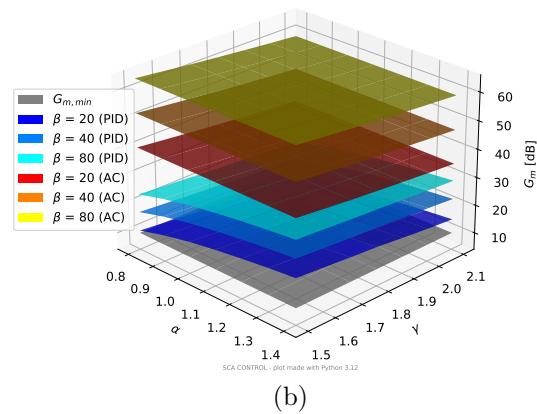
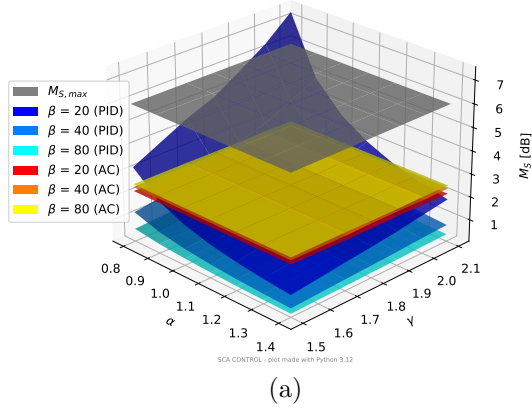
Robustness analysis ( $G_m$ ): structure=1p1z, d=1, overshoot=0.1Robustness analysis ( $G_m$ ): structure=1p1z, d=1, overshoot=0.05

Figure 5: Test of gain margin for 1p1z-process with a) 10% overshoot, b) 5% overshoot.

Robustness analysis ( $M_S$ ): structure=1p1z, d=1, overshoot=0.1



Robustness analysis ( $M_S$ ): structure=1p1z, d=1, overshoot=0.05

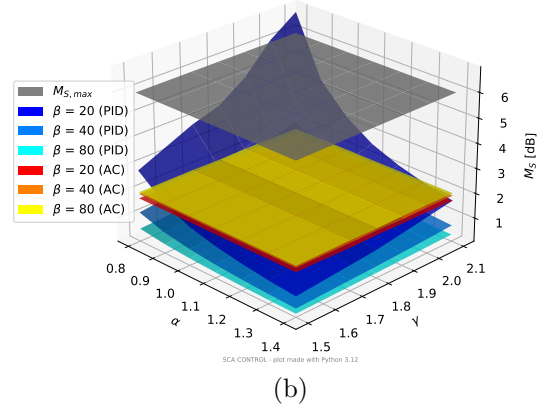
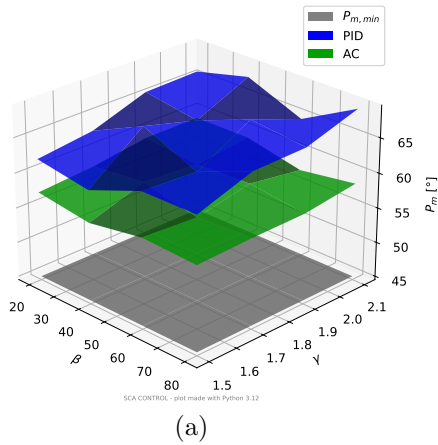


Figure 6: Test of sensitivity peak for 1p1z-process with a) 10% overshoot, b) 5% overshoot.

Robustness analysis ( $P_m$ ): structure=2p, d=0, overshoot=0.1



Robustness analysis ( $P_m$ ): structure=2p, d=0, overshoot=0.05

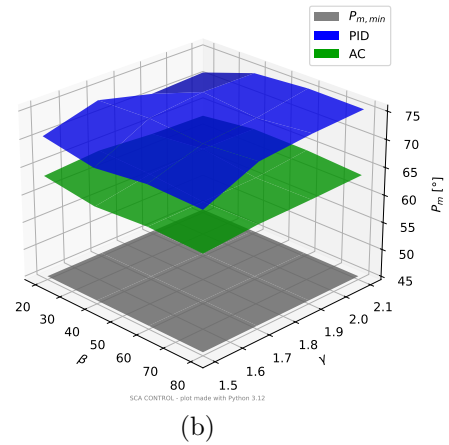
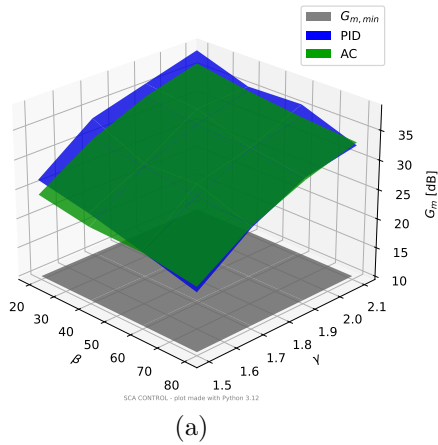


Figure 7: Test of phase margin for 2p-process with a) 10% overshoot, b) 5% overshoot.

Robustness analysis ( $G_m$ ): structure=2p, d=0, overshoot=0.1



Robustness analysis ( $G_m$ ): structure=2p, d=0, overshoot=0.05

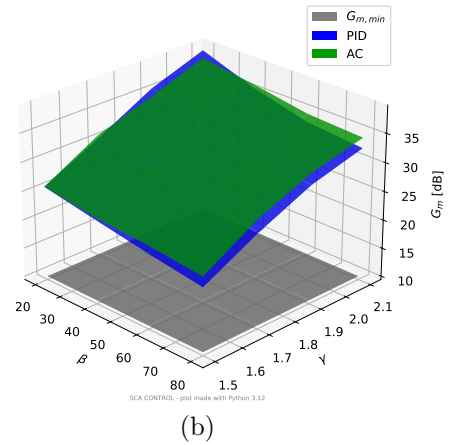
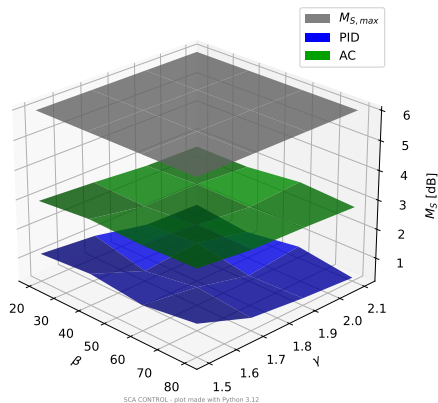
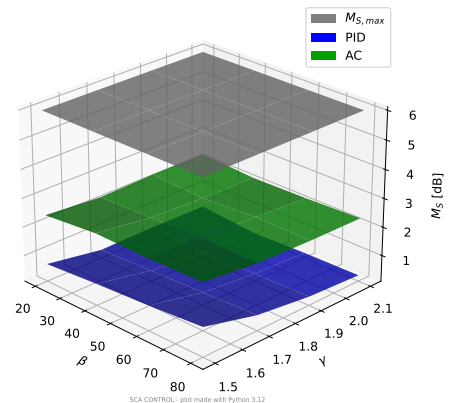


Figure 8: Test of gain margin for 2p-process with a) 10% overshoot, b) 5% overshoot.

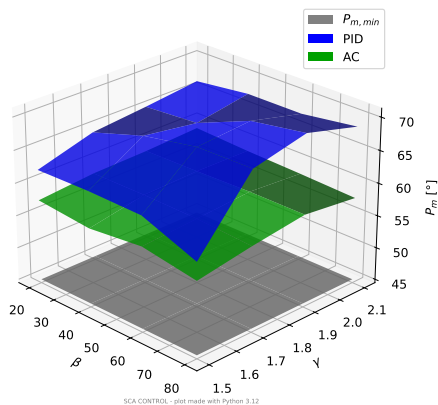
Robustness analysis ( $M_S$ ): structure=2p, d=0, overshoot=0.1

(a)

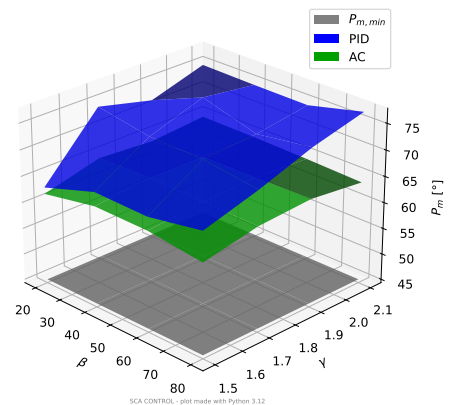
Robustness analysis ( $M_S$ ): structure=2p, d=0, overshoot=0.05

(b)

Figure 9: Test of sensitivity peak for 2p-process with a) 10% overshoot, b) 5% overshoot.

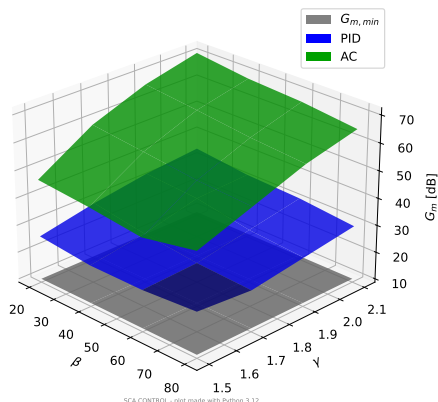
Robustness analysis ( $P_m$ ): structure=2p1z, d=0, overshoot=0.1

(a)

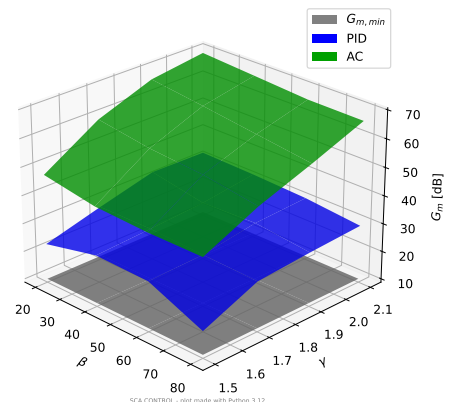
Robustness analysis ( $P_m$ ): structure=2p1z, d=0, overshoot=0.05

(b)

Figure 10: Test of phase margin for 2p-process with a) 10% overshoot, b) 5% overshoot.

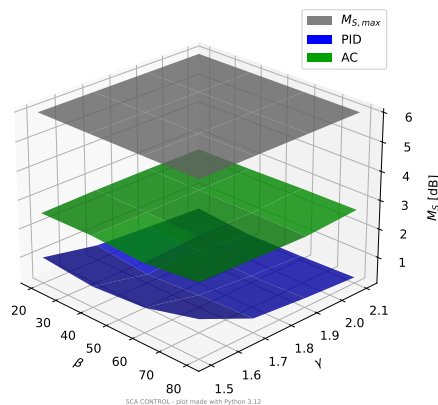
Robustness analysis ( $G_m$ ): structure=2p1z, d=0, overshoot=0.1

(a)

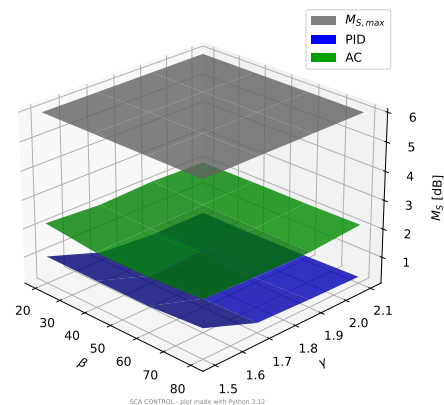
Robustness analysis ( $G_m$ ): structure=2p1z, d=0, overshoot=0.05

(b)

Figure 11: Test of gain margin for 2p-process with a) 10% overshoot, b) 5% overshoot.

Robustness analysis ( $M_S$ ): structure=2p1z, d=0, overshoot=0.1

(a)

Robustness analysis ( $M_S$ ): structure=2p1z, d=0, overshoot=0.05

(b)

Figure 12: Test of sensitivity peak for 2p1z-process with a) 10% overshoot, b) 5% overshoot.

## References

- [1] *CDS 101/110: Lecture 9.1 Frequency Domain Loop Shaping*, California Institute of Technology, 2016.
- [2] *Gain and phase margins*, Massachusetts Institute of Technology, 2007.
- [3] K. J. Astrom, R. M. Murray, *Feedback Systems, An Introduction for Scientists and Engineers*, Princeton University, 2012.

## Contatti

Per ulteriori informazioni non esitare a contattare SCA CONTROL tramite:

- E-mail: [support@scacontrol.com](mailto:support@scacontrol.com)
- Telefono: +39 3429411838
- Sito web: [www.scacontrol.com](http://www.scacontrol.com)

Nota: SCA CONTROL si riserva il diritto di apportare modifiche tecniche o aggiornare i contenuti di questo documento senza preavviso. Tutti i diritti su questo documento, compresi contenuti e illustrazioni, sono riservati. È vietata la riproduzione, la distribuzione a terzi o l'utilizzo di qualsiasi contenuto, parziale o totale, senza autorizzazione scritta da parte di SCA CONTROL.